جبر 2 (عملي)

(الجلسة السادسة)

تمرينات:

① أوجد القيم الذاتية و الأشعة الذاتية للمؤثر الخطي التالي

$$f(x,y,z) = (4x + z, -2x + y, -2x + z)$$

الحل

نوجد مصفوفة المؤثر الخطي بالنسبة للقاعدة القانونية

$$E = \{ e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1) \}$$

حيث أن

$$f(e_1) = f(1,0,0) = (4,-2,-2) = 4e_1 - 2e_2 - 2e_3$$

$$f(e_2) = f(0,1,0) = (0,1,0) = 0e_1 + e_2 + 0e_3$$

$$f(e_3) = f(0,0,1) = (1,0,1) = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3$$

$$\Rightarrow [T]_A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ch(x)_A = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق العمود الثاني

$$\Rightarrow Ch(x)_A = (-1)^{2+2} (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\left((\lambda-4)(\lambda-1) + 2\right) = (\lambda-1)(\lambda^2 - \lambda - 4\lambda + 4 + 2)$$

$\Rightarrow C(\lambda)_A = (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6)$

$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ ، $\lambda_2 = 2$ ، $\lambda_3 = 3$

لإيجاد الأشعة الذاتية نفرض أن $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ شعاع ذاتي مقابل للقيمة الذاتية عندئذٍ

$\Rightarrow (\lambda E - A)v = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda-4 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda-1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} (\lambda-4)x + 0y - z &= 0 \\ \Rightarrow 2x + (\lambda-1)y &= 0 \\ 2x + (\lambda-1)z &= 0 \end{aligned}\right\} \text{---} *$$

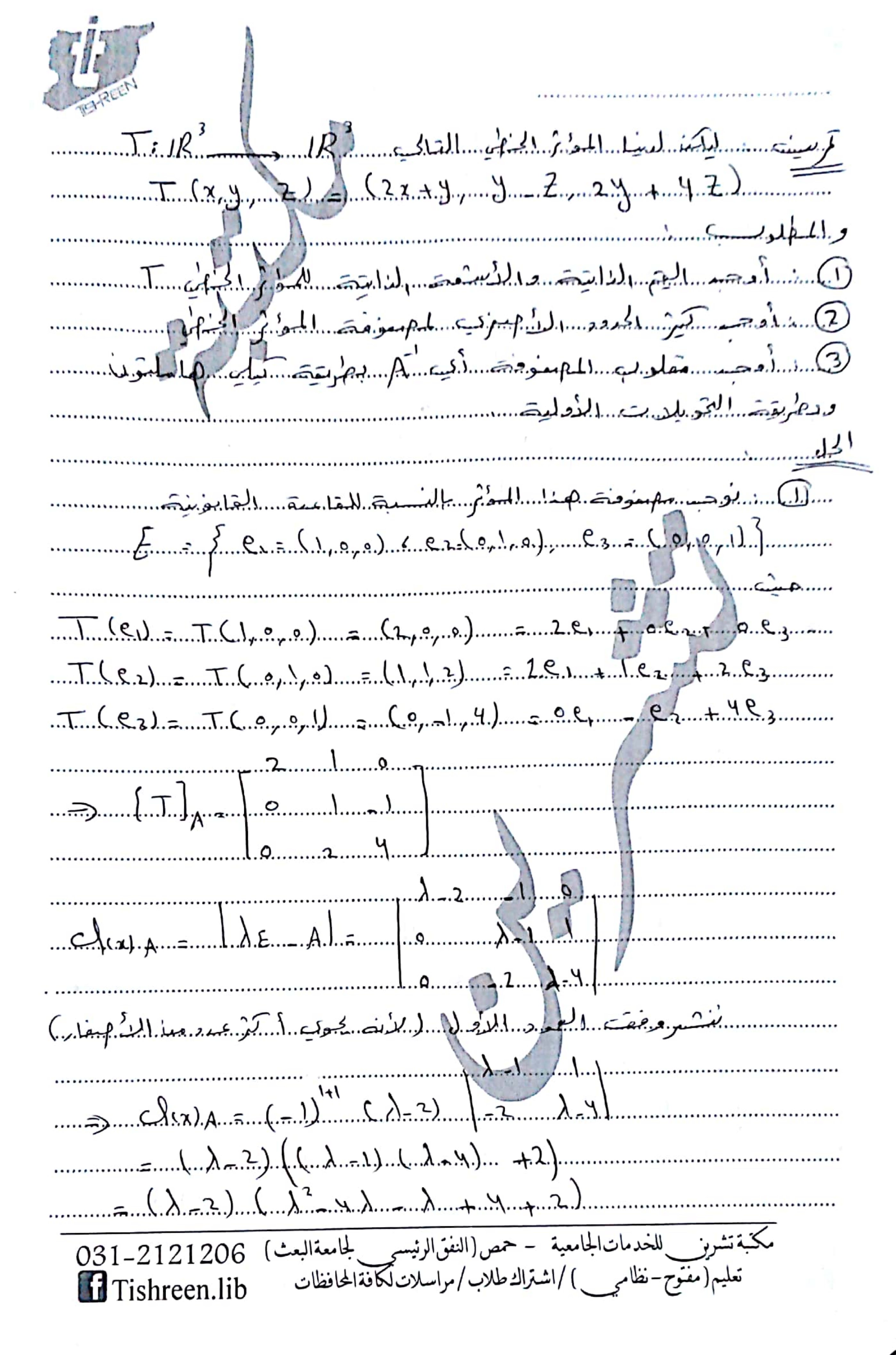
من أجل $\lambda = 1$ نعوض في *

$$\left.\begin{aligned} -3x + 0y - z &= 0 \\ \Rightarrow 2x &= 0 \\ 2x &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 0 \text{ ، } z = 0 \text{ ، } y = t$$

$\Rightarrow v_1 = \{t(0,1,0) \text{ ، } t \in \mathbb{R}\}$

لإيجاد $\lambda_2 = 2$ و $\lambda_3 = 3$ نتبع نفس الخطوات السابقة ونعوضها في * ((وهي وظيفة)) ☺

النواتج $v_2 = t(-1,1,1)$ و $v_3(-\frac{1}{2},1,1)$ ، $t \in \mathbb{R}$



تمرين: ليكن لدينا المؤثر الخطي التالي $T: IR^3 \longrightarrow IR^3$

$$T(x,y,z) = (2x+y,\ y-z,\ 2y+4z)$$

والمطلوب:

1) أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية للمؤثر الخطي T

2) أوجد كثير الحدود الأصغري لمصفوفة المؤثر الخطي

3) أوجد مقلوب المصفوفة أي A^{-1} بطريقة كايلي هاملتون وبطريقة التحويلات الأولية

الحل

1) نوجد مصفوفة هذا المؤثر بالنسبة للقاعدة القانونية

$$E = \{e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\}$$

حيث

$$T(e_1) = T(1,0,0) = (2,0,0) = 2e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

$$T(e_2) = T(0,1,0) = (1,1,2) = 1e_1 + 1e_2 + 2e_3$$

$$T(e_3) = T(0,0,1) = (0,-1,4) = 0e_1 - e_2 + 4e_3$$

$$\Rightarrow [T]_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$ch(x)_A = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق العمود الأول (لأنه يحوي أكبر عدد من الأصفار)

$$\Rightarrow ch(x)_A = (-1)^{1+1}(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -2 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\left((\lambda-1)(\lambda-4) + 2\right)$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2 - 4\lambda - \lambda + 4 + 2)$$

$= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$

$\Rightarrow \varphi(x)_A = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$

$\Rightarrow \varphi(x)_A = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 3)$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$ و $\lambda_3 = 3$

لإيجاد الأشعة الذاتية نفرض $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ شعاع ذاتي مقابل للقيمة الذاتية

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & -2 & \lambda - 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (\lambda - 2)x - y = 0 \\ (\lambda - 1)y + z = 0 \\ -2y + (\lambda - 4)z = 0 \end{array}\right\} \text{———} *$$

من أجل $\lambda = 2$ نعوض في *

$$\left.\begin{array}{l} -y = 0 \\ y + z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0 \text{ و } z = 0 \text{ و } x = t$$

$\Rightarrow \{ v_{1,2} = (t, 0, 0) \; ; \; t \in \mathbb{R} \}$

من أجل $\lambda = 3$ نعوض في *

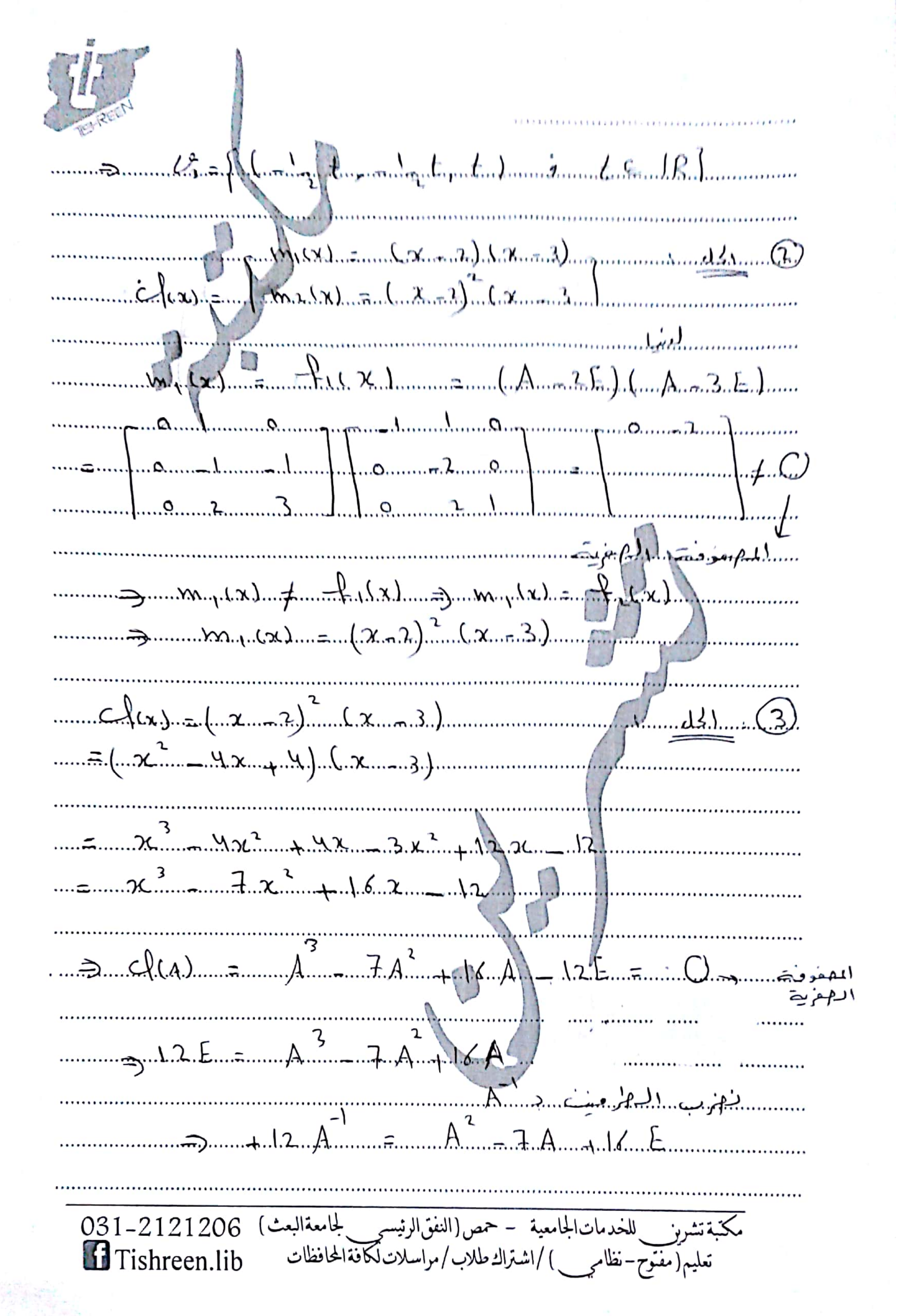
$x - y = 0$

$\Rightarrow 2y + z = 0$

$-2y - z = 0$

نفرض $z = t \Leftarrow -2y = t \Leftarrow y = -\frac{1}{2}t$

ولدينا $x = y \Rightarrow x = -\frac{1}{2}t$



$\Rightarrow V_3 = \{(-\frac{1}{2}t, -\frac{1}{2}t, t) \; ; \; t \in \mathbb{R}\}$

② الحل :

$$cl(x) = \begin{cases} m_1(x) = (x-2)(x-3) \\ m_2(x) = (x-2)^2(x-3) \end{cases}$$

لدينا

$$m_1(x) = f_1(x) = (A-2E)(A-3E)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \neq O$$

↓ المصفوفة الصفرية

$$\Rightarrow m_1(x) \neq f_1(x) \Rightarrow m_1(x) = f_2(x)$$

$$\Rightarrow m_1(x) = (x-2)^2(x-3)$$

③ الحل :

$$cl(x) = (x-2)^2(x-3)$$

$$= (x^2 - 4x + 4)(x-3)$$

$$= x^3 - 4x^2 + 4x - 3x^2 + 12x - 12$$

$$= x^3 - 7x^2 + 16x - 12$$

$$\Rightarrow cl(A) = A^3 - 7A^2 + 16A - 12E = O$$ ← المصفوفة الصفرية

$$\Rightarrow 12E = A^3 - 7A^2 + 16A$$

نضرب الطرفين بـ A^{-1}

$$\Rightarrow 12A^{-1} = A^2 - 7A + 16E$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{12}\left(A^{2} - 7A + 16E\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{12}\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 10 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -14 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & -14 & -28 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 8 & -4 & -1 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

طريقة التحويلات الأولية وظيفة

« انتهت المحاضرة السادسة »

« مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح »

« إعداد : فاطمة الشميني »